

2022 年普通高等学校招生全国统一考试（新高考 I 卷）

数 学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 请保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M = \{x | \sqrt{x} < 4\}$, $N = \{x | 3x \geq 1\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{x | 0 \leq x < 2\}$ B. $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 2\}$
C. $\{x | 3 \leq x < 16\}$ D. $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 16\}$

【答案】D

【解析】集合 $M = \{x | 0 \leq x < 16\}$, 集合 $N = \{x | x \geq \frac{1}{3}\}$, $M \cap N = \{x | \frac{1}{3} \leq x < 16\}$.

故选 D.

2. 若 $i(1-z)=1$, 则 $z+\bar{z}=$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

【答案】D

【解析】对原式两边同时乘以 i 得： $z-1=i$, 即 $z=1+i$, 所以 $\bar{z}=1-i$, 即 $z+\bar{z}=2$. 故选 D.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上， $BD=2DA$. 记 $\overrightarrow{CA}=m$, $\overrightarrow{CD}=n$, 则 $\overrightarrow{CB}=$

- A. $3m-2n$ B. $-2m+3n$ C. $3m+2n$ D. $2m+3n$

【答案】B

【解析】因为 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}$, 又因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$, 所以 $\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CD}$, 即 $\overrightarrow{CB}=-2m+3n$. 故选 B.

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库，已知该水库水位为海拔148.5m时，相应水面的面积为 140km^2 ；水位为海拔157.5m时，相应水面的面积为 180km^2 . 将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔148.5m上升到157.5m时，增加的水量约为($\sqrt{7} \approx 2.65$)

- A. $1.0 \times 10^9 \text{ m}^3$
- B. $1.2 \times 10^9 \text{ m}^3$
- C. $1.4 \times 10^9 \text{ m}^3$
- D. $1.6 \times 10^9 \text{ m}^3$

【答案】C

【解析】由题意 $S_1 = 140\text{km}^2$, $S_2 = 180\text{km}^2$, $h = (157.5 - 148.5)\text{km} = 9\text{km}$, 代入棱台体积公式 $V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})h$, 公式可得: $V \approx 1.4 \times 10^9 \text{ m}^3$. 故选 C.

5. 从2至8的7个整数中随机取2个不同的数，则这2个数互质的概率为

- A. $\frac{1}{6}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $\frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】总事件数共 $C_7^2 = \frac{7 \times 6}{2} = 21$,

第一个数取2时，第二个数可以是3,5,7；

第一个数取3时，第二个数可以是4,5,7,8；

第一个数取4时，第二个数可以是5,7；

第一个数取5时，第二个数可以是6,7,8；

第一个数取6时，第二个数可以是7；

第一个数取7时，第二个数可以是8；

所以 $P = \frac{3+4+2+3+1+1}{21} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$.

6. 记函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) + b (\omega > 0)$ 的最小正周期为 T . 若 $\frac{2}{3}\pi < T < \pi$ ，且 $y = f(x)$ 的函

数图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ 中心对称，则 $f(\frac{\pi}{2}) =$

- A. 1
- B. $\frac{3}{2}$
- C. $\frac{5}{2}$
- D. 3

【答案】A

【解析】 $\omega = \frac{2\pi}{T} \in (2, 3)$ ， $y = f(x)$ 的函数图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ 中心对称，则有 $b = 2$ ，且

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2$, 所以 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}\right)+2=2$, 则 $\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}=2k\pi, k \in \mathbf{Z}$; 解得 $\omega=\frac{8k-1}{6}$, 由

$\omega \in (2, 3)$ 得 $k=2$, $\omega=\frac{5}{2}$, 故 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)+2=-1+2=1$.

7. 设 $a=0.1e^{0.1}$, $b=\frac{1}{9}$, $c=-\ln 0.9$, 则

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

【答案】C

【解析】令 $a=x e^x$, $b=\frac{x}{1-x}$, $c=-\ln(1-x)$,

$$\textcircled{1} \quad \ln a - \ln b = x + \ln x - [\ln x - \ln(1-x)],$$

$$y = x + \ln(1-x), x \in (0, 0.1]; \quad y' = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0,$$

所以 $y \leq 0$, 所以 $\ln a - \ln b \leq 0$, 所以 $b > a$

$$\textcircled{2} \quad a - c = x e^x + \ln(1-x), x \in (0, 0.1],$$

$$y' = x e^x + e^x - \frac{1}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)e^x - 1}{1-x},$$

$$\text{令 } k(x) = (1+x)(1-x)e^x - 1, \text{ 所以 } k'(x) = (1-x^2 - 2x)e^x > 0,$$

所以 $k(x) > k(0) > 0$, 所以 $y' > 0$,

所以 $a - c > 0$, 所以 $a > c$.

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l , 其各顶点都在同一球面上. 若该球的体积为 36π , 且

$3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$, 则该正四棱锥体积的取值范围是

- A. $[18, \frac{81}{4}]$ B. $[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}]$ C. $[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}]$ D. $[18, 27]$

【答案】C

【解析】记三棱锥高与侧棱夹角为 θ , 高为 h , 底面中心到各顶点的距离为 m ,

$$\cos \theta = \frac{3^2 + l^2 - 3^2}{2 \times 3 \times l} = \frac{l}{6} \in [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}], \text{ 则 } l = 6 \cos \theta, \quad m = l \cdot \sin \theta = 6 \sin \theta \cos \theta,$$

$$h = \frac{m}{\tan \theta} = \frac{6 \sin \theta \cos \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = 6 \cos^2 \theta, \quad S_{底} = \frac{1}{2} \times 2m \times 2m = 2m^2,$$

$$\text{故 } V = \frac{1}{3} S_{底} \cdot h = \frac{1}{3} \times 2m^2 h = 144(\sin \theta \cos^2 \theta)^2,$$

$$\text{令 } y = \sin \theta \cos^2 \theta = \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) = x(1 - x^2) = -x^3 + x, x = \sin \theta \in [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$y' = -3x^2 + 1, \text{ 故 } x \in [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}), \quad y' < 0, \quad x \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}], \quad y' > 0,$$

$$\text{即 } V_{\max} = 144 y_{\max}^2 = 144 \times [\frac{\sqrt{3}}{3} \times (\frac{\sqrt{6}}{3})^2]^2 = \frac{64}{3},$$

$$V_{\min} = 144 \times (\frac{\sqrt{3}}{2} \times (\frac{1}{2})^2)^2 = \frac{27}{4}.$$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，则

- A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 90°
- B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 90°
- C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 45°
- D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°

【答案】 ABD

【解析】 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 $BC_1 \perp B_1C$ ， $BC_1 \perp A_1B_1$ ，所以 $BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1CD ，所以 $BC_1 \perp DA_1$ ， $BC_1 \perp CA_1$ ，故选项 A, B 均正确；

设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$ ，因为 $A_1C_1 \perp$ 平面 BB_1D_1D ，所以直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为

$$\angle C_1BO，\text{ 在直角 } \triangle C_1BO \text{ 中，} \sin \angle C_1BO = \frac{C_1O}{BC_1} = \frac{1}{2}，\text{ 故 } \angle C_1BO = 30^\circ，\text{ 故选项 C 错误；}$$

直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle C_1BC = 45^\circ$ ，故选项 D 正确。综上，答案选 ABD.

10. 已知函数 $f(x) = x^3 - x + 1$ ，则

- A. $f(x)$ 有两个极值点
- B. $f(x)$ 有三个零点
- C. 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心
- D. 直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

【答案】 AC

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 1$ ，所以 $f(x)$ 有两个极值点 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 与 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，又 $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} < 0$ ，

所以 $f(x)$ 只有一个零点；由 $f(x) + f(-x) = 2$ 可知，点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心；曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y = 2x - 1$ ，所以答案选 AC.

11. 已知 O 为坐标原点，点 $A(1, 1)$ 在抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 上，过点 $B(0, -1)$ 的直线

交 C 于 P, Q 两点，则

- A. C 的准线为 $y = -1$
- B. 直线 AB 与 C 相切

C. $|OP| \cdot |OQ| > |OA|^2$

D. $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$

【答案】BCD

【解析】由题意可知: $l=2p$, 所以抛物线 $C: x^2 = y$, 故 C 的准线为 $y=-\frac{1}{4}$, 故 A 不对;

由 $y'=2x$ 得曲线 C 在点 $A(1,1)$ 处的切线斜率为 2, 所以切线方程为 $y=2x-1$, 故直线 AB 与 C 相切;

过点 $B(0,-1)$ 的直线设为 $y=kx-1$, 交 C 于 P, Q 两点的坐标分别设为 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

联立直线与 C 方程可得 $\begin{cases} x^2 = y \\ y = kx - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - kx + 1 = 0$, 所以有 $x_1 + x_2 = k, x_1 x_2 = 1$,

且 $\Delta = k^2 - 4 > 0$, 即 $k^2 > 4$, 进一步可得 $y_1 + y_2 = k^2 - 2, y_1 y_2 = 1$, 此时

$$|OP| \cdot |OQ| = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{(y_1 + y_1^2)(y_2 + y_2^2)} = \sqrt{y_1 y_2 (y_1 y_2 + y_1 + y_2 + 1)} = \sqrt{k^2} > 4$$

又 $|OA|^2 = 2$, 所以 C 正确;

$$|BP| \cdot |BQ| = \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ} = (x_1, y_1 + 1) \cdot (x_2, y_2 + 1) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + y_1 + y_2 + 1 = k^2 + 1 > 5, \text{ 又}$$

$|BA|^2 = 5$, 故 D 正确; 综上, 答案选 BCD.

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 记 $g(x) = f'(x)$. 若 $f(\frac{3}{2}-2x), g(2+x)$ 均为偶函数, 则

A. $f(0)=0$

B. $g(-\frac{1}{2})=0$

C. $f(-1)=f(4)$

D. $g(-1)=g(2)$

【答案】BC

【解析】由 $f(\frac{3}{2}-2x)$ 为偶函数可知 $f(x)$ 关于直线 $x=\frac{3}{2}$ 对称,

由 $g(2+x)$ 为偶函数可知: $g(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称,

结合 $g(x)=f'(x)$, 根据 $g(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称可知 $f(x)$ 关于点 $(2, t)$ 对称,

根据 $f(x)$ 关于直线 $x=\frac{3}{2}$ 对称可知: $g(x)$ 关于点 $(\frac{3}{2}, 0)$ 对称,

综上, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是周期为 2 的周期函数, 所以有 $f(0)=f(2)=t$, 所以 A 不正确;

$f(-1)=f(1), f(4)=f(2), f(1)=f(2)$, 故 $f(-1)=f(4)$, 所以 C 正确.

$g(-\frac{1}{2})=g(\frac{3}{2})=0, g(-1)=g(1)$, 所以 B 正确;

又 $g(1)+g(2)=0$, 所以 $g(-1)+g(2)=0$, 所以 D 不正确.

故选 BC.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $(1 - \frac{y}{x})(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为_____ (用数字作答).

【答案】-28

【解析】 原式等于 $(x+y)^8 - \frac{y}{x}(x+y)^8$, 由二项式定理, 其展开式中 x^2y^6 的系数为

$$C_8^2 - C_8^3 = -28.$$

14. 写出与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ 都相切的一条直线的方程_____.

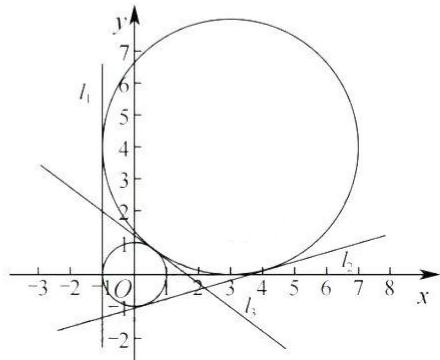
【答案】 $x = -1$, 或 $y = \frac{7}{24}x - \frac{25}{24}$, 或 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ (答对其中之一即可)

【解析】 由图可得, 两圆外切, 且均与直线 $I_1: x = -1$ 相切。另过两圆圆心的直线 I 的方程为 $y = \frac{4}{3}x$, 可得 I 与 I_1 交点为 $P(-1, -\frac{4}{3})$. 由切线定理得, 两圆另一公切线 I_2 过点 P , 设

$I_2: y + \frac{4}{3} = k(x+1)$, 由点到直线距离公式可得 $\frac{|k - \frac{4}{3}|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$, 解得 $k = \frac{7}{24}$, 即

$I_2: y = \frac{7}{24}x - \frac{25}{24}$. 另由于两圆外切, 因此在公切点处存在公切线 I_3 与 I 垂直, 解得

$$I_3: y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}.$$



15. 若曲线 $y = (x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

【解析】 易得曲线不过原点, 设切点为 $(x_0, (x_0+a)e^{x_0})$, 则切线斜率为

$f'(x_0) = (x_0+a+1)e^{x_0}$. 可得切线方程为 $y - (x_0+a)e^{x_0} = (x_0+a+1)e^{x_0}(x - x_0)$, 又切线过原点,

可得 $-(x_0+a)e^{x_0} = -x_0(x_0+a+1)e^{x_0}$, 化简得 $x_0^2 + ax_0 - a = 0$ (※), 又切线有两条, 即※

方程有两不等实根, 由判别式 $\Delta = a^2 + 4a > 0$, 得 $a < -4$, 或 $a > 0$.

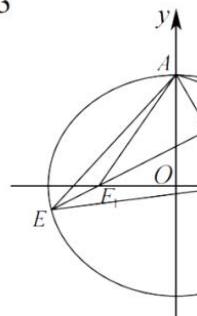
16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)， C 的上顶点为 A ，两个焦点为 F_1, F_2 ，离心率为 $\frac{1}{2}$ ，过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D, E 两点， $|DE| = 6$ ，则 $\triangle ADE$ 的周长是_____.

【答案】13

【解析】椭圆离心率为 $\frac{1}{2}$ ，不妨设 $C: \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$ ，且 $\triangle AF_1F_2$ 为正三角形，则直线 DE 斜率 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 由等腰三角形性质可得， $|AE| = |EF_2|$ ， $|AD| = |DF_2|$ ，由椭圆性质得 $\triangle ADE$ 的周长等价于 $|DE| + |DF_2| + |EF_2| = 4a$. 另设直线 DE 方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + c)$ ，与椭圆方程联立得 $13x^2 + 8cx - 32c^2 = 0$.

由弦长公式 $|DE| = \sqrt{k^2 + 1} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$ 得

$$|DE| = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} \cdot \sqrt{\left(-\frac{8c}{13}\right)^2 + \frac{128c^2}{13}} = \frac{48}{13}c = 6, \text{ 即 } c = \frac{13}{8}, 4a = 8c = 13.$$



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1 = 1$ ， $\{\frac{S_n}{a_n}\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明： $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$.

【解析】(1) $S_1 = a_1 = 1$ ，所以 $\frac{S_1}{a_1} = 1$ ，
所以 $\{\frac{S_n}{a_n}\}$ 是首项为 1，公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列，

所以 $\frac{S_n}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{n+2}{3}$ ，所以 $S_n = \frac{n+2}{3}a_n$.

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n+2}{3}a_n - \frac{n+1}{3}a_{n-1}$ ，

所以 $(n-1)a_n = (n+1)a_{n-1}$ ，即 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1}$ ($n \geq 2$);

累积法可得： $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ($n \geq 2$)，又 $a_1 = 1$ 满足该式，

所以 $\{a_n\}$ 得通项公式为 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 2[\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}] \\ &= 2(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &= 2(1 - \frac{1}{n+1}) < 2. \end{aligned}$$

18. (12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}$.

(1) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$, 求 B ;

(2) 求 $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 的最小值.

【解析】(1) 由已知条件得: $\sin 2B + \sin A \sin 2B = \cos A + \cos A \cos 2B$

$$\begin{aligned} \sin 2B &= \cos A + \cos A \cos 2B - \sin A \sin 2B = \cos A + \cos(A + 2B) \\ &= \cos[\pi - (B + C)] + \cos[\pi - (B + C) + 2B] \\ &= -\cos(B + C) + \cos[\pi + (B - C)] \\ &= -2 \cos B \cos C \end{aligned}$$

所以 $2 \sin B \cos B = -2 \cos B \cos C$, 即 $(\sin B + \cos C) \cos B = 0$,

由已知条件: $1 + \cos 2B \neq 0$, 则 $B \neq \frac{\pi}{2}$, 可得 $\cos B \neq 0$,

所以 $\sin B = -\cos C = \frac{1}{2}$, $B = \frac{\pi}{6}$.

(2) 由 (1) 知 $\sin B = -\cos C > 0$, 则 $B = C - \frac{\pi}{2}$, $\sin B = \sin(C - \frac{\pi}{2}) = -\cos C$,

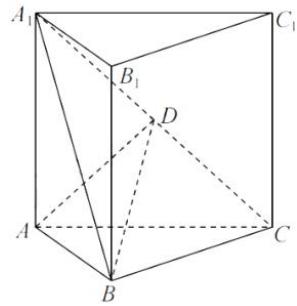
$$\sin A = \sin(B + C) = \sin(2C - \frac{\pi}{2}) = -\cos 2C,$$

$$\begin{aligned} \text{由正弦定理 } \frac{a^2 + b^2}{c^2} &= \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\cos^2 2C + \cos^2 C}{\sin^2 C} \\ &= \frac{(1 - 2 \sin^2 C)^2 + (1 - \sin^2 C)}{\sin^2 C} \\ &= \frac{2 + 4 \sin^4 C - 5 \sin^2 C}{\sin^2 C} = \frac{2}{\sin^2 C} + 4 \sin^2 C - 5 \\ &\geq 2 \sqrt{\frac{2}{\sin^2 C} \cdot 4 \sin^2 C} - 5 = 4\sqrt{2} - 5, \end{aligned}$$

当且仅当 $\sin^2 C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立, 所以 $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2} - 5$.

19. (12 分)

如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4, $\triangle A_1BC$ 的面
积为 $2\sqrt{2}$.



- (1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离;
- (2) 设 D 为 AC 的中点, $AA_1=AB$, 平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.

【解析】(1) 设 A 到平面 A_1BC 的距离为 h ,

$$V_{A_1-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1BC} \cdot A_1A = \frac{1}{3} V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3},$$

$$V_{A-A_1BC} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1BC} \cdot h = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \cdot h,$$

所以 $\frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \cdot h = \frac{4}{3}$, 所以 $h = \sqrt{2}$, 所以 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$.

(3) 取 A_1B 的中点 E , 连接 AE ,

因为 $AA_1=AB$, 所以 $AE \perp A_1B$,

因为平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 平面 $A_1BC \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = A_1B$,

所以 $AE \perp$ 平面 A_1BC , $AE = \sqrt{2}$, 则 $AA_1 = AB = 2$, 所以 $AE \perp BC$,

因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 所以 $A_1A \perp BC$,

因为 $AE \cap A_1A = A$, 所以 $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $BC \perp AB$,

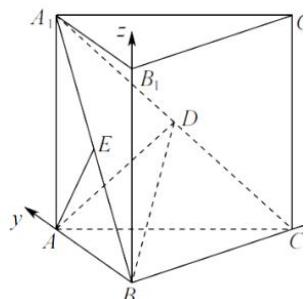
由 $V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot A_1A = \frac{1}{2} \times 2 \times BC \times 2 = 4$, 所以 $BC = 2$,

以 BC 为 x 轴, BA 为 y 轴, BB_1 为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

所以 $B(0,0,0)$, $A(0,2,0)$, $C(2,0,0)$, $A_1(0,2,2)$, $E(0,1,1)$, $D(1,1,1)$

平面 BDC 的法向量设为 $\vec{n}_1 = \overrightarrow{AE} = (0, -1, 1)$, 平面 BDA 的法向量设
为 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$,

$$\overrightarrow{BA} = (0, 2, 0), \overrightarrow{BD} = (1, 1, 1),$$



$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \\ \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } y = 0,$$

设 $x = 1$, 则 $z = -1$, 所以 $\overrightarrow{n_2} = (1, 0, -1)$, 所以 $\cos \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} \rangle = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = -\frac{1}{2}$,

设二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 α , 则 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20. (12 分)

一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系, 在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例(称为病例组), 同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人(称为对照组), 得到如下数据:

| | 不够良好 | 良好 |
|-----|------|----|
| 病例组 | 40 | 60 |
| 对照组 | 10 | 90 |

(1) 能否有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2) 从该地的人群中任选一人, A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”, B 表示事

件“选到的人患有该疾病”, $\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$ 与 $\frac{P(\bar{B}|\bar{A})}{P(B|\bar{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险

程度的一项度量指标, 记该指标为 R .

(i) 证明: $R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$;

(ii) 利用该调查数据, 给出 $P(A|B)$, $P(A|\bar{B})$ 的估计值, 并利用 (i) 的结果给出 R 的估计值.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \begin{array}{c|c|c|c} P(K^2 \geq k) & 0.050 & 0.010 & 0.001 \\ \hline k & 3.841 & 6.635 & 10.828 \end{array}$$

【解析】(1) 假设患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯没有差异,

$$\text{则 } K^2 = \frac{200(40 \times 90 - 60 \times 10)^2}{50 \times 150 \times 100 \times 100} = 24 > 10.828,$$

所以有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异;

$$\begin{aligned}
(2) \text{ (i)} \quad R &= \frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)} \cdot \frac{P(\bar{B}|\bar{A})}{P(B|\bar{A})} = \frac{\frac{P(AB)}{P(A)}}{\frac{P(\bar{A}B)}{P(A)}} \cdot \frac{\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}}{\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}} = \frac{P(AB)}{P(\bar{A}B)} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A}B)} \\
&= \frac{P(AB)}{P(\bar{A}B)} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A}B)} = \frac{\frac{P(AB)}{P(B)}}{\frac{P(\bar{A}B)}{P(B)}} \cdot \frac{\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}}{\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{B})}} = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A}|B)}, \text{ 得证;} \\
\end{aligned}$$

(ii) 由调查数据可知 $P(A|B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$, $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$,

则 $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = \frac{3}{5}$, $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{9}{10}$, 所以 $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} = 6$.

21. (12 分)

已知点 $A(2, 1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-1} = 1 (a > 1)$ 上, 直线 l 交 C 于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 的斜率之和为 0.

(1) 求 l 的斜率;

(2) 若 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 求 $\triangle PAQ$ 的面积.

【答案】(1) l 的斜率为 0; (2) $\triangle PAQ$ 的面积为 $\frac{16\sqrt{2}}{9}$

【解析】(1) 将点 A 代入双曲线方程得 $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{a^2-1} = 1$, 化简得 $a^4 - 4a^2 + 4 = 0$ 得:

$a^2 = 2$, 故双曲线方程为 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$;

由题显然直线 l 的斜率存在, 设 $l: y = kx + m$, 设 $P(x_1, y_1)Q(x_2, y_2)$, 则联立直线与双曲线得: $(2k^2 - 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 + 2 = 0$,

故 $x_1 + x_2 = -\frac{4km}{2k^2 - 1}$, $x_1 x_2 = \frac{2m^2 + 2}{2k^2 - 1}$,

$k_{AP} + k_{AQ} = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} = \frac{kx_1 + m - 1}{x_1 - 2} + \frac{kx_2 + m - 1}{x_2 - 2} = 0$,

化简得: $2kx_1x_2 + (m-1-2k)(x_1+x_2) - 4(m-1) = 0$,

$$\text{故 } \frac{2k(2m^2+2)}{2k^2-1} + (m-1-2k)\left(-\frac{4km}{2k^2-1}\right) - 4(m-1) = 0,$$

即 $(k+1)(m+2k-1) = 0$, 而直线 l 不过 A 点, 故 $k = -1$.

(2) 设直线 AP 的倾斜角为 α , 由 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 得 $\tan \frac{\angle PAQ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

由 $2\alpha + \angle PAQ = \pi$, 得 $k_{AP} = \tan \alpha = \sqrt{2}$, 即 $\frac{y_1-1}{x_1-2} = \sqrt{2}$,

$$\text{联立 } \frac{y_1-1}{x_1-2} = \sqrt{2}, \text{ 及 } \frac{x_1^2}{2} - y_1^2 = 1 \text{ 得 } x_1 = \frac{10-4\sqrt{2}}{3}, \quad y_1 = \frac{4\sqrt{2}-5}{3},$$

$$\text{代入直线 } l \text{ 得 } m = \frac{5}{3}, \text{ 故 } x_1 + x_2 = \frac{20}{3}, \quad x_1x_2 = \frac{68}{9}$$

$$\text{而 } |AP| = \sqrt{3}|x_1-2|, \quad |AQ| = \sqrt{3}|x_2-2|,$$

$$\text{由 } \tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}, \text{ 得 } \sin \angle PAQ = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{故 } S_{\triangle PAQ} = \frac{1}{2}|AP||AQ|\sin \angle PAQ = \sqrt{2}|x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4| = \frac{16\sqrt{2}}{9}.$$

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值.

(1) 求 a ;

(2) 证明: 存在直线 $y = b$, 其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点,

并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

$$【\text{解析}] (1) \quad f'(x) = e^x - a, \quad g'(x) = a - \frac{1}{x}$$

① $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 即 $f(x)$ 没有最小值.

该类情况应舍去.

② $a > 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上小于 0, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上大于 0,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x = \ln a$ 处有最小值为 $f(\ln a) = a - a \ln a$ ，

所以 $g'(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上小于 0，在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上大于 0，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}$ 处有最小值为 $g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a$ ，

因为 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值。

所以有 $f(\ln a) = a - a \ln a = g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a$ ，即 $a - a \ln a = 1 + \ln a$

因为 $a > 0$ ，所以上式等价于 $\ln a - \frac{a-1}{a+1} = 0$ ，

令 $h(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1}$ ($x > 0$)，

则 $h'(x) = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0$ 恒成立，所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

又因为 $h(1) = 0 = h(a)$ 且 $a > 0$ ，所以 $a = 1$ 。

(2) 证明：由 (1) $f(x) = e^x - x$, $g(x) = x - \ln x$,

且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

$g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，且 $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1$ 。

① $b < 1$ 时，此时 $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1 > b$ ，显然 $y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$

共有 0 个交点，不符合题意；

② $b = 1$ 时，此时 $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1 = b$ ， $y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有 2 个交点，交点的横坐标分别为 0 和 1；

③ $b > 1$ 时，首先，证明 $y = b$ 与曲线 $y = f(x)$ 有 2 个交点：

即证明 $F(x) = f(x) - b$ 有 2 个零点, $F'(x) = f'(x) = e^x - 1$,

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又因为 $F(-b) = e^{-b} > 0$, $F(0) = 1 - b < 0$, $F(b) = e^b - 2b > 0$,

(令 $t(b) = e^b - 2b$, 则 $t'(b) = e^b - 2 > 0$, $t(b) > t(1) = e - 2 > 0$)

所以明 $F(x) = f(x) - b$ 在 $(-\infty, 0)$ 上存在且只存在 1 个零点, 设为 x_1 , 在 $(0, +\infty)$ 上存在

且只存在 1 个零点, 设为 x_2 .

其次, 证明 $y = b$ 与曲线和有 2 个交点:

即证明 $G(x) = g(x) - b$ 有 2 个零点, $G'(x) = g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$,

所以 $G(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

又因为 $G(e^{-b}) = e^{-b} > 0$, $G(0) = 1 - b < 0$, $G(2b) = b - \ln 2b > 0$,

(令 $\mu(b) = b - \ln 2b$, 则 $\mu'(b) = 1 - \frac{1}{b} > 0$, $\mu(b) > \mu(1) = 1 - \ln 2 > 0$)

所以 $F(x) = f(x) - b$ 在 $(0, 1)$ 上存在且只存在 1 个零点, 设为 x_3 , 在 $(1, +\infty)$ 上存在且只

存在 1 个零点, 设为 x_4 .

再次, 证明存在 b 使得 $x_2 = x_3$:

因为 $F(x_2) = G(x_3) = 0$, 所以 $b = e^{x_2} - x_2 = x_3 - \ln x_3$,

若 $x_2 = x_3$, 则 $e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2$, 即 $e^{x_2} - 2x_2 + \ln x_2 = 0$,

所以只需证明 $e^x - 2x + \ln x = 0$ 在 $(0, 1)$ 上有解即可,

即 $\varphi(x) = e^x - 2x + \ln x$ 在 $(0, 1)$ 上有零点,

因为 $\varphi\left(\frac{1}{e^3}\right) = e^{\frac{1}{e^3}} - \frac{2}{e^3} - 3 < 0$, $\varphi(1) = e - 2 > 0$,

所以 $\varphi(x) = e^x - 2x + \ln x$ 在 $(0, 1)$ 上存在零点, 取一零点为 x_0 , 令 $x_2 = x_3 = x_0$ 即可,

此时取 $b = e^{x_0} - x_0$

则此时存在直线 $y = b$, 其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点

最后证明 $x_1 + x_4 = 2x_0$, 即从左到右的三个交点的横坐标成等差数列;

因为 $F(x_1) = F(x_2) = F(x_0) = 0 = G(x_3) = G(x_0) = G(x_4)$,

所以 $F(x_1) = G(x_0) = F(\ln x_0)$,

又因为 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $x_1 < 0$, $0 < x_0 < 1$ 即 $\ln x_0 < 0$, 所以 $x_1 = \ln x_0$

同理, 因为 $F(x_0) = G(e^{x_0}) = G(x_4)$,

又因为 $G(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $x_0 > 0$ 即 $e^{x_0} > 1$, $x_4 > 1$, 所以 $x_4 = e^{x_0}$,

又因为 $e^{x_0} - 2x_0 + \ln x_0 = 0$, 所以 $x_1 + x_4 = e^{x_0} + \ln x_0 = 2x_0$,

即直线 $y = b$, 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.