2022 年普通高等学校招生全国统一考试（全国乙卷）

文科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. A 2. A 3. D 4. C 5. C 6. B 7. B 8. A 9. A 10. D 11. D 12. C

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 2

14. $\frac{3}{10}$##0.3

15. $(x-2)^2+(y-3)^2=13$ 或 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 或 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$ 或 $\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$；

16. ①. $-\frac{1}{2}$； ②. $\ln 2$.

三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

17. （1）$\frac{5\pi}{8}$；

（2）由 $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$ 可得，

$\sin C(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=\sin B(\sin C\cos A-\cos C\sin A)$，再由正弦定理可得，

$ac\cos B-bc\cos A=bc\cos A-ab\cos C$，然后根据余弦定理可知，

$\frac{1}{2}\left(a^2+c^2-b^2\right)-\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)-\frac{1}{2}\left(a^2+b^2-c^2\right)$，化简得：

$2a^2=b^2+c^2$，故原等式成立.

18. 【小问 1 详解】

由于 $AD=CD$，E 是 AC 的中点，所以 $AC\perp DE$.

由于 $\begin{cases}AD=CD\\BD=BD\\\angle ADB=\angle CDB\end{cases}$，所以 $\triangle ADB\cong\triangle CDB$，

所以 $AB=CB$，故 $AC\perp BD$，

由于 $DE\cap BD=D$，$DE,BD\subset$ 平面 BED，

所以 $AC\perp$ 平面 BED，

由于 $AC\subset$ 平面 ACD，所以平面 $BED\perp$ 平面 ACD.

【小问 2 详解】

依题意 $AB=BD=BC=2$，$\angle ACB=60^\circ$，三角形 ABC 是等边三角形，

所以 $AC=2, AE=CE=1, BE=\sqrt{3}$，

由于 $AD=CD, AD\perp CD$，所以三角形 ACD 是等腰直角三角形，所以 $DE=1$.

$DE^2+BE^2=BD^2$，所以 $DE\perp BE$，

由于 $AC\cap BE=E$，$AC,BE\subset$ 平面 ABC，所以 $DE\perp$ 平面 ABC.

由于 $\triangle ADB\cong\triangle CDB$，所以 $\angle FBA=\angle FBC$，

由于 $\begin{cases}BF=BF\\\angle FBA=\angle FBC\\AB=CB\end{cases}$，所以 $\triangle FBA\cong\triangle FBC$，

所以 $AF=CF$，所以 $EF\perp AC$，

由于 $S_{\triangle AFC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot EF$，所以当 EF 最短时，三角形 AFC 的面积最小值.

过 E 作 $EF\perp BD$，垂足为 F，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BED$ 中，$\frac{1}{2}\cdot BE\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot EF$，解得 $EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

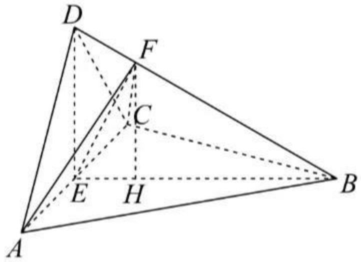
所以 $DF=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}, BF=2-DF=\frac{3}{2}$，

所以$\dfrac{BF}{BD}=\dfrac{3}{4}$

过F作$FH\perp BE$，垂足为H，则$FH//DE$，所以$FH\perp$平面ABC，且$\dfrac{FH}{DE}=\dfrac{BF}{BD}=\dfrac{3}{4}$，

所以$FH=\dfrac{3}{4}$，

所以$V_{F-ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot FH=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



19. （1）$0.06\mathrm{m}^2$；$0.39\mathrm{m}^3$

（2）0.97

（3）$1209\mathrm{m}^3$

20. （1）-1

（2）$(0,+\infty)$

21. （1）$\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1$

（2）$(0,-2)$

【小问 1 详解】

解：设椭圆E的方程为$mx^2+ny^2=1$，过$A(0,-2)$, $B\left(\dfrac{3}{2},-1\right)$，

则$\begin{cases}4n=1\\ \dfrac{9}{4}m+n=1\end{cases}$，解得$m=\dfrac{1}{3}$，$n=\dfrac{1}{4}$，

所以椭圆E的方程为：$\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

$A(0,-2),B(\frac{3}{2},-1)$，所以 $AB:y+2=\frac{2}{3}x$，

①若过点 $P(1,-2)$ 的直线斜率不存在，直线 $x=1$.代入 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$，

可得 $M(1,\frac{2\sqrt{6}}{3})$，$N(1,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$，代入 AB 方程 $y=\frac{2}{3}x-2$，可得

$T(\sqrt{6}+3,\frac{2\sqrt{6}}{3})$，由 $\overline{MT}=\overline{TH}$ 得到 $H(2\sqrt{6}+5,\frac{2\sqrt{6}}{3})$.求得 HN 方程:

$y=(2-\frac{2\sqrt{6}}{3})x-2$，过点 $(0,-2)$.

②若过点 $P(1,-2)$ 的直线斜率存在，设 $kx-y-(k+2)=0,M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases} kx-y-(k+2)=0 \\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，得 $(3k^2+4)x^2-6k(2+k)x+3k(k+4)=0$，

可得 $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{6k(2+k)}{3k^2+4} \\ x_1x_2=\frac{3k(4+k)}{3k^2+4} \end{cases}$，$\begin{cases} y_1+y_2=\frac{-8(2+k)}{3k^2+4} \\ y_2y_2=\frac{4(4+4k-2k^2)}{3k^2+4} \end{cases}$，

且 $x_1y_2+x_2y_1=\frac{-24k}{3k^2+4}(*)$

联立 $\begin{cases} y=y_1 \\ y=\frac{2}{3}x-2 \end{cases}$，可得 $T(\frac{3y_1}{2}+3,y_1),H(3y_1+6-x_1,y_1)$.

可求得此时 $HN:y-y_2=\frac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}(x-x_2)$，

将 $(0,-2)$，代入整理得 $2(x_1+x_2)-6(y_1+y_2)+x_1y_2+x_2y_1-3y_1y_2-12=0$，

将(*)代入，得 $24k+12k^2+96+48k-24k-48-48k+24k^2-36k^2-48=0$,

显然成立，

综上，可得直线 HN 过定点 $(0,-2)$.

【点睛】求定点、定值问题常见的方法有两种:

①从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关;

②直接推理、计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中选定一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑．按所涂题号进行评分，不涂、多涂均按所答第一题评分；多答按所答第一题评分．

[选修 4—4：坐标系与参数方程]

22. （1）$\sqrt{3}x+y+2m=0$

（2）$-\dfrac{19}{12}\le m\le\dfrac{5}{2}$

[选修 4—5：不等式选讲]

23. 【小问 1 详解】

证明：因为 $a>0$，$b>0$，$c>0$，则 $a^{\frac{3}{2}}>0$，$b^{\frac{3}{2}}>0$，$c^{\frac{3}{2}}>0$，

所以 $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{3}\ge\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{3}{2}}}$，

即 $(abc)^{\frac{1}{2}}\le\dfrac{1}{3}$，所以 $abc\le\dfrac{1}{9}$，当且仅当 $a^{\frac{3}{2}}=b^{\frac{3}{2}}=c^{\frac{3}{2}}$，即 $a=b=c=\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$ 时取等号．

【小问 2 详解】

证明：因为 $a>0$，$b>0$，$c>0$，

所以 $b+c\ge2\sqrt{bc}$，$a+c\ge2\sqrt{ac}$，$a+b\ge2\sqrt{ab}$，

所以 $\dfrac{a}{b+c}\le\dfrac{a}{2\sqrt{bc}}=\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$，$\dfrac{b}{a+c}\le\dfrac{b}{2\sqrt{ac}}=\dfrac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$，$\dfrac{c}{a+b}\le\dfrac{c}{2\sqrt{ab}}=\dfrac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\le\frac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}+\frac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}=\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}=\frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号．