2022全国乙卷高考数学(理)试题

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$,集合 M 满足 $\complement_U M=\{1,3\}$,则

A. $2\in M$　　B. $3\in M$　　C. $4\notin M$　　D. $5\notin M$

2. 已知 $z=1-2\mathrm{i}$,且 $z+a\bar{z}+b=0$,其中 a,b 为实数,则

A. $a=1,b=-2$　　B. $a=-1,b=2$　　C. $a=1,b=2$　　D. $a=-1,b=-2$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=3$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

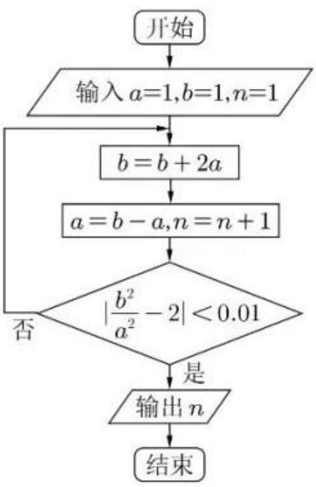
4. 嫦娥二号卫星在完成探月任务后,继续进行深空探测,成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星.为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值,用到数列 $\{b_n\}$:$b_1=1+\frac{1}{\alpha_1}$,$b_2=1+\frac{1}{\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2}}$,$b_3=1+\frac{1}{\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2+\frac{1}{\alpha_3}}}$,…,依此类推,其中 $\alpha_k\in\mathbf{N}^*(k=1,2,\cdots)$.则

A. $b_1<b_5$　　B. $b_3<b_8$　　C. $b_6<b_2$　　D. $b_4<b_7$

5. 设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点,点 A 在 C 上,点 $B(3,0)$,若 $|AF|=|BF|$,则 $|AB|=$

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. $3\sqrt{2}$

6. 执行右边的程序框图,输出的 $n=$



A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别为 AB,BC 的中点,则

A. 平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1　　B. 平面 $B_1EF\perp$ 平面 A_1BD

C. 平面 B_1EF // 平面 A_1AC　　D. 平面 B_1EF // 平面 A_1C_1D

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项的和为 168，$a_2-a_5=42$，则 $a_6=$

A. 14　　B. 12　　C. 6　　D. 3

9. 已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果互相独立．已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1，p_2，p_3，且 $p_3>p_2>p_1>0$．记该棋手连胜两盘的概率为 p，则

A. p 与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关　　B. 该棋手在第二盘与甲比赛，p 最大

C. 该棋手在第二盘与乙比赛，p 最大　　D. 该棋手在第二盘与丙比赛，p 最大

11. 双曲线 C 的两个焦点为 F_1，F_2，以 C 的实轴为直径的圆记为 D，过 F_1 作 D 的切线，与 C 交于 M，N 两点，且 $\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$，则 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

12. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=7$，若 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，$g(2)=4$，则 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=$

A. -21　　B. -22　　C. -23　　D. -24

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作，则甲、乙都入选的概率为 ______.

14. 过四点 $(0,0)$，$(4,0)$，$(-1,1)$，$(4,2)$ 中的三点的一个圆的方程为 ______.

15. 记函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期为 T，若 $f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点，则 ω 的最小值为 ______.

16. 已知 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-\mathrm{e}x^2(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的极小值点和极大值点，若 $x_1<x_2$，则实数 a 的取值范围是 ______.

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

（一）必考题：共 60 分.

17.（10 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$.

（1）证明：$2a^2=b^2+c^2$；

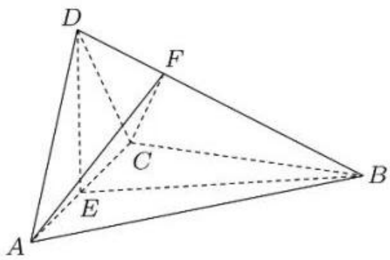
（2）若 $a=5$，$\cos A=\frac{25}{31}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (12分)

如图，四面体 $ABCD$ 中，$AD \perp CD$，$AD = CD$，$\angle ADB = \angle BDC$，E 为 AC 的中点.

(1) 证明：平面 $BED \perp$ 平面 ACD；

(2) 设 $AB = BD = 2$，$\angle ACB = 60^\circ$，点 F 在 BD 上，当 $\triangle AFC$ 的面积最小时，求 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值.



19. (12分)

某地经过多年的环境治理，已将荒山改造成了绿水青山，为估计一林区某种树木的总材积量，随机选取了10棵这种树木，测量每棵树的根部横截面积（单位：m^2）和材积量（单位：m^3），得到如下数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038$，$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158$，$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$.

(1) 估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；

(2) 求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数（精确到0.01）；

(3) 现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积，并得到所有这种树木的根部横截面积总和为186 m^2. 已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比. 利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值.

附：相关系数 $r = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$，$\sqrt{1.896} \approx 1.377$.

20.(12分)

已知椭圆E的中心为坐标原点，对称轴为x轴、y轴，且过$A(0,-2)$，$B\left(\frac{3}{2},-1\right)$两点.

(1)求E的方程；

(2)设过点$P(1,-2)$的直线交E于M，N两点，过M且平行于x轴的直线与线段AB交于点T，点H满足$\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$. 证明：直线$HN$过定点.

21.(12分)

已知函数$f(x)=\ln(1+x)+axe^{-x}$.

(1)当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

(2)若$f(x)$在区间$(-1,0)$，$(0,+\infty)$各恰有一个零点，求a的取值范围.

(二)选考题：共10分.

22.[选修4－4：坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos 2t,\\ y=2\sin t\end{cases}$($t$为参数). 以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线$l$的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{3})+m=0$.

(1)写出l的直角坐标方程；

(2)若l与C有公共点，求m的取值范围.

23.[选修4－5：不等式选讲](10分)

已知a,b,c都是正数，且$a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}=1$，证明：

(1)$abc\leqslant\frac{1}{9}$；

(2)$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{abc}}$.