2022年普通高等学校招生全国统一考试
数学（理科）
参考答案

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名和座位号填写在答题卡上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. A　2. A　3. C.　4. D　5. B　6. B　7. A　8. D　9. C　10.D　11. C　12. D

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $\dfrac{3}{10}$

14. $(x-2)^2+(y-3)^2=13$或$(x-2)^2+(y-1)^2=5$或$\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{3}\right)^2=\dfrac{65}{9}$或

$\left(x-\dfrac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{169}{25}$；

15. 3

16. $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$

三、解答题：共0分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分.

17.

（1）

证明：因为$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$，

所以$\sin C\sin A\cos B-\sin C\sin B\cos A=\sin B\sin C\cos A-\sin B\sin A\cos C$，

所以$ac\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-2bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-ab\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

即$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}-\left(b^2+c^2-a^2\right)=-\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$，

所以$2a^2=b^2+c^2$；

（2）

解：因为$a=5,\cos A=\dfrac{25}{31}$，

由（1）得$b^2+c^2=50$，

由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

则$50-\dfrac{50}{31}bc=25$，

所以$bc=\dfrac{31}{2}$，

故$\left(b+c\right)^2=b^2+c^2+2bc=50+31=81$，

所以$b+c=9$，

所以$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=14$.

18.

（1）

因为$AD=CD$，E为AC的中点，所以$AC\perp DE$；

在$\triangle ABD$和$\triangle CBD$中，因为$AD=CD,\angle ADB=\angle CDB,DB=DB$，

所以$\triangle ABD\cong\triangle CBD$，所以$AB=CB$，又因为$E$为$AC$的中点，所以$AC\perp BE$；

又因为$DE,BE\subset$平面BED，$DE\cap BE=E$，所以$AC\perp$平面BED，

因为$AC\subset$平面ACD，所以平面$BED\perp$平面ACD.

（2）

连接EF，由（1）知，$AC\perp$平面BED，因为$EF\subset$平面BED，

所以$AC\perp EF$，所以$S_{\triangle AFC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot EF$，

当$EF\perp BD$时，EF最小，即$\triangle AFC$的面积最小.

因为$\triangle ABD\cong\triangle CBD$，所以$CB=AB=2$，

又因为$\angle ACB=60°$，所以$\triangle ABC$是等边三角形，

因为E为AC的中点，所以$AE=EC=1$，$BE=\sqrt{3}$，

因为$AD\perp CD$，所以$DE=\dfrac{1}{2}AC=1$,

在□DEB中，$DE^2+BE^2=BD^2$，所以$BE\perp DE$.

以E为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系$E-xyz$，

则$A(1,0,0),B(0,\sqrt{3},0),D(0,0,1)$，所以$\overrightarrow{AD}=(-1,0,1),\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$，

设平面ABD的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=-x+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，取$y=\sqrt{3}$，则$\vec{n}=(3,\sqrt{3},3)$，

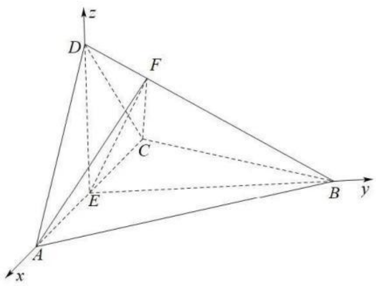
又因为$C(-1,0,0),F\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$，所以$\overrightarrow{CF}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$，

所以$\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{CF}\rangle=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\vec{n}||\overrightarrow{CF}|}=\frac{6}{\sqrt{21}\times\sqrt{\frac{7}{4}}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

设CF与平面ABD所成的角的正弦值为$\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$\sin\theta=\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{CF}\rangle\right|=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

所以CF与平面ABD所成的角的正弦值为$\frac{4\sqrt{3}}{7}$.



19.

（1）

样本中10棵这种树木的根部横截面积的平均值$\overline{x}=\frac{0.6}{10}=0.06$

样本中 10 棵这种树木的材积量的平均值 $\overline{y}=\dfrac{3.9}{10}=0.39$

据此可估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积为0.06m^2，

平均一棵的材积量为0.39m^3

（2）

$$r=\frac{\sum_{\rm i=1}^{10}\left(x_{\rm i}-\overline{x}\right)\left(y_{\rm i}-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{\rm i=1}^{10}\left(x_{\rm i}-\overline{x}\right)^2\sum_{\rm i=1}^{10}\left(y_{\rm i}-\overline{y}\right)^2}}=\frac{\sum_{\rm i=1}^{10}x_{\rm i}y_{\rm i}-10\overline{xy}}{\sqrt{\left(\sum_{\rm i=1}^{10}x_{\rm i}^2-10\overline{x}^2\right)\left(\sum_{\rm i=1}^{10}y_{\rm i}^2-10\overline{y}^2\right)}}$$

$$=\frac{0.2474-10\times0.06\times0.39}{\sqrt{(0.038-10\times0.06^2)(1.6158-10\times0.39^2)}}=\frac{0.0134}{\sqrt{0.0001896}}\approx\frac{0.0134}{0.01377}\approx0.97$$

则 $r\approx0.97$

（3）

设该林区这种树木的总材积量的估计值为$Y\text{m}^3$，

又已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比，

可得$\dfrac{0.06}{0.39}=\dfrac{186}{Y}$，解之得$Y=1209\text{m}^3$.

则该林区这种树木的总材积量估计为1209m^3

20.

（1）

解：设椭圆 E 的方程为 $mx^2+ny^2=1$，过 $A\left(0,-2\right),B\left(\dfrac{3}{2},-1\right)$，

则$\begin{cases}4n=1\\ \dfrac{9}{4}m+n=1\end{cases}$，解得 $m=\dfrac{1}{3}$， $n=\dfrac{1}{4}$，

所以椭圆 E 的方程为：$\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1$.

（2）

$A(0,-2),B(\dfrac{3}{2},-1)$，所以 $AB:y+2=\dfrac{2}{3}x$，

□若过点 $P(1,-2)$ 的直线斜率不存在，直线 $x=1$.代入$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$，

可得$M(1,\frac{2\sqrt{6}}{3})$，$N(1,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$，代入$AB$方程$y=\frac{2}{3}x-2$，可得

$T(\sqrt{6}+3,\frac{2\sqrt{6}}{3})$，由$\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$得到$H(2\sqrt{6}+5,\frac{2\sqrt{6}}{3})$.求得$HN$方程：

$y=(2-\frac{2\sqrt{6}}{3})x-2$，过点$(0,-2)$.

□若过点$P(1,-2)$的直线斜率存在，设$kx-y-(k+2)=0,M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}kx-y-(k+2)=0\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得$(3k^2+4)x^2-6k(2+k)x+3k(k+4)=0$，

可得$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{6k(2+k)}{3k^2+4}\\ x_1x_2=\frac{3k(4+k)}{3k^2+4}\end{cases}$，$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-8(2+k)}{3k^2+4}\\ y_2y_2=\frac{4(4+4k-2k^2)}{3k^2+4}\end{cases}$，

且$x_1y_2+x_2y_1=\frac{-24k}{3k^2+4}(*)$

联立$\begin{cases}y=y_1\\ y=\frac{2}{3}x-2\end{cases}$，可得$T(\frac{3y_1}{2}+3,y_1),H(3y_1+6-x_1,y_1)$.

可求得此时$HN:y-y_2=\frac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}(x-x_2)$，

将$(0,-2)$，代入整理得$2(x_1+x_2)-6(y_1+y_2)+x_1y_2+x_2y_1-3y_1y_2-12=0$，

将$(*)$代入，得$24k+12k^2+96+48k-24k-48-48k+24k^2-36k^2-48=0$,

显然成立，

综上，可得直线HN过定点$(0,-2)$.

21.

（1）

$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$

当$a=1$时，$f(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{e^x}$，$f(0)=0$，所以切点为$(0,0)$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{e^x}$，$f'(0)=2$，所以切线斜率为2

所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=2x$

（2）

$$f(x)=\ln(1+x)+\frac{ax}{\mathrm{e}^x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{a(1-x)}{\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^x+a\left(1-x^2\right)}{(1+x)\mathrm{e}^x}$$

设$g(x)=\mathrm{e}^x+a\left(1-x^2\right)$

1°若$a>0$,当$x\in(-1,0),g(x)=\mathrm{e}^x+a\left(1-x^2\right)>0$,即$f'(x)>0$

所以$f(x)$在$(-1,0)$上单调递增,$f(x)<f(0)=0$

故$f(x)$在$(-1,0)$上没有零点,不合题意

2°若$-1\leqslant a\leqslant 0$,当$x\in(0,+\infty)$,则$g'(x)=\mathrm{e}^x-2ax>0$

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增所以$g(x)>g(0)=1+a\geqslant 0$,即$f'(x)>0$

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,$f(x)>f(0)=0$

故$f(x)$在$(0,+\infty)$上没有零点,不合题意

3°若$a<-1$

(1)当$x\in(0,+\infty)$,则$g'(x)=\mathrm{e}^x-2ax>0$,所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

$g(0)=1+a<0,g(1)=\mathrm{e}>0$

所以存在$m\in(0,1)$,使得$g(m)=0$,即$f'(m)=0$

当$x\in(0,m),f'(x)<0,f(x)$单调递减

当$x\in(m,+\infty),f'(x)>0,f(x)$单调递增

所以

当$x\in(0,m),f(x)<f(0)=0$

当$x\to+\infty,f(x)\to+\infty$

所以$f(x)$在$(m,+\infty)$上有唯一零点

又$(0,m)$没有零点,即$f(x)$在$(0,+\infty)$上有唯一零点

(2)当$x\in(-1,0),g(x)=\mathrm{e}^x+a\left(1-x^2\right)$

设$h(x)=g'(x)=\mathrm{e}^x-2ax$

$h'(x)=\mathrm{e}^x-2a>0$

所以$g'(x)$在$(-1,0)$单调递增

$g^{'}(-1)=\frac{1}{e}+2a<0, g^{'}(0)=1>0$

所以存在$n\in(-1,0)$,使得$g'(n)=0$

当$x\in(-1,n), g^{'}(x)<0, g(x)$单调递减

当$x\in(n,0), g^{'}(x)>0, g(x)$单调递增, $g(x)<g(0)=1+a<0$

又$g(-1)=\frac{1}{e}>0$

所以存在$t\in(-1,n)$,使得$g(t)=0$,即$f'(t)=0$

当$x\in(-1,t), f(x)$单调递增,当$x\in(t,0), f(x)$单调递减

有$x\to-1, f(x)\to-\infty$

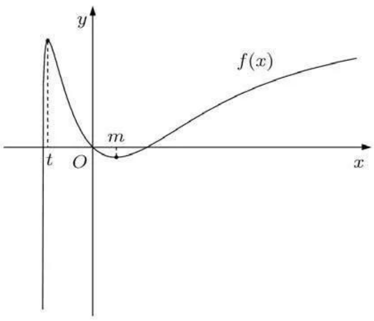
而$f(0)=0$,所以当$x\in(t,0), f(x)>0$

所以$f(x)$在$(-1,t)$上有唯一零点,$(t,0)$上无零点

即$f(x)$在$(-1,0)$上有唯一零点

所以$a<-1$,符合题意

所以若$f(x)$在区间$(-1,0),(0,+\infty)$各恰有一个零点,求a的取值范围为$(-\infty,-1)$



（二）选考题，共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

[选修4-4：坐标系与参数方程]

22.

（1）

因为l：$\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+m=0$，所以$\frac{1}{2}\rho\cdot\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\cdot\cos\theta+m=0$，

又因为$\rho \cdot \sin\theta = y, \rho \cdot \cos\theta = x$，所以化简为$\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}x+m=0$，

整理得l的直角坐标方程：$\sqrt{3}x+y+2m=0$

（2）

联立l与C的方程，即将$x=\sqrt{3}\cos 2t$，$y=2\sin t$代入

$\sqrt{3}x+y+2m=0$中，可得$3\cos 2t+2\sin t+2m=0$，

所以$3(1-2\sin^2 t)+2\sin t+2m=0$，

化简为$-6\sin^2 t+2\sin t+3+2m=0$，

要使l与C有公共点，则$2m=6\sin^2 t-2\sin t-3$有解，

令$\sin t=a$，则$a\in[-1,1]$，令$f(a)=6a^2-2a-3$，$(-1\leqslant a\leqslant 1)$，

对称轴为$a=\frac{1}{6}$，开口向上，

所以$f(a)_{max}=f(-1)=6+2-3=5$，

$f(a)_{\min}=f(\frac{1}{6})=\frac{1}{6}-\frac{2}{6}-3=-\frac{19}{6}$，

所以$-\frac{19}{6}\le 2m\le 5$

m的取值范围为$-\frac{19}{12}\le m\le\frac{5}{2}$.

[选修4-5：不等式选讲]

23.

（1）

证明：因为$a>0$，$b>0$，$c>0$，则$a^{\frac{3}{2}}>0$，$b^{\frac{3}{2}}>0$，$c^{\frac{3}{2}}>0$，

所以$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{3}\ge\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{3}{2}}}$，

即$(abc)^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{3}$，所以$abc\le\frac{1}{9}$，当且仅当$a^{\frac{3}{2}}=b^{\frac{3}{2}}=c^{\frac{3}{2}}$，即$a=b=c=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$时取等号.

（2）

证明：因为$a>0$，$b>0$，$c>0$，

所以$b+c\ge 2\sqrt{bc}$，$a+c\ge 2\sqrt{ac}$，$a+b\ge 2\sqrt{ab}$，

所以$\frac{a}{b+c}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$，$\frac{b}{a+c}\le\frac{b}{2\sqrt{ac}}=\frac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$，$\frac{c}{a+b}\le\frac{c}{2\sqrt{ab}}=\frac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\le\frac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}+\frac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}=\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}=\frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

当且仅当$a=b=c$时取等号．